УДК 517.972.8

А. Г. ЧЕНЦОВ

МНОЖЕСТВА ПРИТЯЖЕНИЯ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ ДОСТИЖИМЫХ МНОЖЕСТВ ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧ*

Введение. Отсутствие устойчивости решений является свойством, весьма распространенным в задачах современной прикладной математики. Оно приводит зачастую к негативным последствиям и может существенно затруднять исследование соответствующей задачи с применением огрубленных моделей. В то же время известны и такие содержательные задачи, когда неустойчивость можно в некоторой степени использовать для улучшения конечного результата. В частности, это возможно в экстремальных задачах, когда рассматривается специфическое возмущение условий решаемой задачи, а именно — ослабление системы ограничений. Последнее очевидным образом улучшает (точнее: не ухудшает) значение экстремума соответствующего критерия. В то же время исходная система ограничений вынуждает, по сути дела, оптимизировать соответствующий критерий “в пределе”. На самом же деле речь в таких случаях приходится вести об асимптотической достижимости некоторых ключевых, для соответствующей экстремальной задачи, состояний в естественном пространстве, которое, в известном смысле, можно считать целевым, т.к. от реализации его элементов непосредственно зависит качество решения. Примеры такого рода возникают, в частности, в задачах управления [1]–[5], где анализ экстремумов можно во многих случаях свести к изучению поведения областей достижимости и пучков траекторий при ослабленных должным образом ограничениях.

Итак, сама реализация качества (вообще говоря, лучшего, чем в исходной постановке с невозмущенной системой ограничений) становится иной; она приобретает черты выбора способов асимптотического поведения в условиях, когда требования точности (соблюдения условий задачи) последовательно ужесточаются. Тем не менее стимул, связанный с достижением лучшего качества, делает в ряде случаев естественной вышеупомянутую смену ориентиров: выбор допустимых в традиционном смысле управлений заменяется выбором также допустимых, но уже в смысле приближенной реализации ограничений, вариантов асимптотики управлений в виде последовательности или, более общим образом, направленности таковых.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97–01–00458) и Госкомитета РФ по высшему образованию (97-0-1.9-19).

В результате такой редукции естественные варианты множеств достижимости, существенные для невозмущенной задачи, заменяются множествами притяжения, характерными для задач асимптотического анализа. В частности, это касается областей достижимости [1]–[4] управляемых систем: они могут (при переходе к асимптотической версии) испытывать скачкообразное расширение; получающиеся при этом множества притяжения объективно играют роль регуляризаций. С прикладной точки зрения эти множества отвечают наиболее естественному режиму функционирования технических систем, когда строгие ограничения в какой-то степени нарушаются.

Итак, отсутствие устойчивости в задачах управления при ослаблении системы ограничений (это могут быть краевые условия, фазовые или ресурсные ограничения) стимулирует редукцию к “правильной” постановке, учитывающей реальные условия функционирования технических устройств.

Ввиду актуальности задач управления в постановке, допускающей малые в том или ином смысле нарушения системы ограничений, традиционно предпринимались специальные исследования конструкций, доставляющих асимптотические (по сути дела) аналоги обычных достижимых множеств: областей достижимости, пучков траекторий и других объектов такого рода. В основу этих конструкций были заложены идеи расширения пространства управлений. Так, в [1] для этих целей использовались (в случае задачи управления с импульсными ограничениями) функции ограниченной вариации. В [3],[5] и в обширном цикле других исследований (см. библиографию в [5]) была применена схема расширения в классе управлений-мер или обобщенных управлений; сами задачи, возникающие в результате такого расширения, именовались обобщенными задачами управления. Существо же упомянутых конструкций составляла процедура, аналогичная в значительной мере компактификациям в общей топологии.

Таким образом, процедуры, применявшиеся в задачах теории управления для построения соответствующих версий вышеупомянутых множеств притяжения, имеют своей основой топологические построения с применением специальных погружений функциональных пространств, используемых в исходной задаче, в пространства более совершенные и имеющие смысл своеобразных компактификаторов. Последние, как правило, определялись в рамках структур, характеризуемых метрическими пространствами, а используемые версии компактности сводились к компактности секвенциальной. Подробное содержательное обсуждение этих процедур и способов их применения можно найти в [5]. Впрочем, в тех случаях, которые исследовались в [5], такой секвенциальный подход с элементами метризаций оказывался достаточным, что характерно для конструкций расширения нелинейных задач управления с геометрическими ограничениями; систематическое исследование последних было начато Л.С.Понтрягиным.

Однако уже в случае ресурсных ограничений, типичных для постановок задач импульсного управления, указать механизм компактификации пространства управлений удается, как правило, лишь привлекая топологические структуры, не допускающие метризаций. Наконец, можно указать примеры задач управления, в которых требуемая компактификация пространства управлений вообще неосуществима (см. [6, гл. 7] и [7, с. 156]). Это касается постановок, в которых отсутствуют ресурсные, но имеются другие ограничения; последние могут, например, иметь смысл фазовых ограничений или краевых условий.

Новые, по сравнению с возникающими в [5], трудности мотивируют разработку подходов, использующих топологические конструкции, не сводящиеся к метризуемым компактификаторам и в ряде случаев вообще не допускающие каких-либо компактификаций. В этой связи целесообразно рассмотреть общую постановку задачи об асимптотической достижимости в условиях возмущаемых ограничений и обсудить общие принципы строения множеств притяжения. Этим вопросам и посвящена данная работа. Сначала в ней рассматривается абстрактная постановка, охватывающая широкий круг задач прикладного характера, и предлагается подход к исследованию упомянутой постановки средствами, использующими общие конструкции расширений. В следующем разделе приведена сводка используемых понятий и обозначений. Кроме того, в этом разделе обсуждаются вопросы сравнения множеств притяжения, порожденных различными вариантами ослабления системы ограничений. Наконец, здесь намечены некоторые версии вспомогательных конструкций, целью которых является сведение множеств притяжения к стандартным представлениям в терминах обычных множеств допустимых элементов и их непрерывных образов; эти представления относятся, однако, к усовершенствованному должным образом пространству решений при замене отображений, используемых в исходной постановке, непрерывными операторами соответствующих типов. В частности, используется сведение упомянутых отображений к совершенным (почти совершенным) операторам и к некоторым их аналогам. В следующем разделе вышеупомянутые вспомогательные конструкции применяются к исследованию основной задачи. Получены достаточные условия “стандартной” реализации требуемых множеств притяжения в диапазоне возможных вариантов ослабления системы ограничений, чем достигается известная универсальность предлагаемой конструкции по отношению к классу возмущений. При более слабых условиях получена система оценок упомянутых множеств притяжения в терминах более простых и — самое главное — традиционных представлений множеств допустимых элементов и аналогов областей достижимости. В заключение обсуждаются возможные интерпретации общих положений работы в свете более конкретных конструкций расширений и релаксаций, опубликованных ранее в журнальных статьях и монографиях.

1. Математическая модель: содержательное обсуждение

Целый ряд задач о построении достижимых множеств, понимаемых, например, как области достижимости управляемых систем (см. [1]–[4]), допускает при исследовании некоторых свойств асимптотического характера сведение к следующей схеме, фактически возникшей уже в [5, гл. III,IV]. Элементы этой весьма общей схемы рассматривались в работах [6]–[10].

Пусть даны непустое множество $\mathbf{F}$ (пространство решений), два топологических пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$, а также операторы s и h, действующие из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{X}$ и в $\mathbf{H}$ соответственно; кроме того, фиксируем множество $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$. Условие $s(f) \in \mathbf{Y}$ на выбор $f \in \mathbf{F}$ порождает (в терминах операций образа и прообраза) два характерных множества: множество допустимых элементов $s^{-1}(\mathbf{Y})$ и достижимое множество $h^1(s^{-1}(\mathbf{Y}))$. При этом $\mathbf{H}$ рассматривается как целевое пространство. В пространстве $\mathbf{X}$ регистрируется (фиксируется) нарушение ограничений, что влияет на достижимость элементов $\mathbf{H}$. Именно, элемент $z \in \mathbf{H}$ мы признаем достижимым, если $z = h(f)$ для некоторого $f \in s^{-1}(\mathbf{Y})$; следовательно, мы должны быть уверены в том, что при реализации z в виде $h(f)$, $f \in \mathbf{F}$, не было зафиксировано событие $s(f) \notin \mathbf{Y}$. Такую постановку во многих случаях можно воспринимать как крайность и признавать возможной реализацию элементов $\mathbf{H}$ при малых (в надлежащем смысле) нарушениях вышеупомянутого условия. Действительно, если заменить $\mathbf{Y}$ окрестностью $\mathcal{O}$, то множество допустимых элементов и достижимое множество принимают значения $s^{-1}(\mathcal{O})$ и $h^1(s^{-1}(\mathcal{O}))$ соответственно. Устремляя $\mathcal{O}$ к $\mathbf{Y}$, мы приходим к пределу такого рода достижимых множеств, имеющему смысл множества притяжения (см.[6,с.39,40],[7,с.35]). Уже в простейших примерах [6,гл.1],[7,гл.1,2] упомянутое множество притяжения существенно шире замыкания обычного достижимого множества $h^1(s^{-1}(\mathbf{Y}))$. Для исследования упомянутого множества притяжения предполагается построение следующей модели: конструируются вспомогательное топологическое пространство $\mathbf{K}$, отображение m из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{K}$, а также непрерывные отображения g и ω, действующие из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{X}$ и в $\mathbf{H}$ соответственно; при этом g непрерывно в смысле $\mathbf{K}$ и $\mathbf{X}$, а ω непрерывно в смысле $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$. Постулируется, что в модели, определяемой посредством $(\mathbf{K}, m, g, \omega)$, имеет место $s = g \circ m$ и $h = \omega \circ m$. При некоторых условиях устанавливается совпадение искомого регуляризирующего множества притяжения с $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$. Кроме того, далее исследуются некоторые свойства, характеризующие определенную универсальность представления множества притяжения в виде $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ по отношению к конкретному выбору запаса окрестностей, допускаемых к использованию при ослаблении ограничения $s(f) \in \mathbf{Y}$. В частности, таким образом устанавливается асимптотическая эквивалентность некоторых вариантов ослабления данного ограничения.

Заметим, что наиболее исследованным является случай, когда $\mathbf{K}$ является компактным, а $\mathbf{H}$ — хаусдорфовым пространством. К упомянутому случаю можно свести построения расширений в [5,гл.III,IV], а также часть конструкций [6]–[10]. Однако такая "компактификация" задачи возможна далеко не всегда (см., в частности, пример [7,с.156]). По этой причине мы ограничиваться ею не будем (отметим, что данная компактификация допускает естественные аналогии с компактификациями в общей топологии [11]–[14], но в отличие от последних стеснена связями в виде представлений для s и h). Говоря о конкретном выборе модели, отметим, что в качестве $\mathbf{K}$ использовались обычно $*$-слабо компактные множества в пространствах мер либо их аналоги, сводящиеся нередко к множествам мер при несущественных преобразованиях (см., в частности, мерозначные функции в [5]). Для "некомпактифицируемых" задач управления (в широком смысле) в [6],[9],[10] при построении $\mathbf{K}$ использовались более общие множества в пространстве конечно-аддитивных мер. Для иллюстрации рассмотрим только следующий простейший

П р и м е р. Пусть $\mathbf{F} = [0, 1[$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$ совпадают с вещественной прямой $\mathbb{R}$ в ее обычной $|\cdot|$-топологии; при $f \in \mathbf{F}$ полагаем $s(f) = sup(\{f; 1-f\})$ и $h(f) = f$. Отождествляем $\mathbf{Y}$ с одноэлементным множеством $\{1\}$; при ослаблении $\mathbf{Y}$-ограничения используем интервалы $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$. Тогда $s^{-1}(\mathbf{Y}) = h^1(s^{-1}(\mathbf{Y})) = \{0\}$. В качестве множества притяжения логично использовать неупорядоченную пару $\{0; 1\}$, поскольку к 1 можно неограниченно приближаться на значениях h при сколь угодно точном соблюдении ограничения $s(f) = 1$. Модель (в данном случае это — компактификатор) задаем условиями: $\mathbf{K}$ есть отрезок $[0, 1]$ в обычной его $|\cdot|$-топологии; $m(f) = f$ при $f \in \mathbf{F}$; $g(k) = sup(\{k; 1-k\})$ и $\omega(k) = k$ при $k \in \mathbf{K} = [0, 1]$. Тогда $g^{-1}(\mathbf{Y}) = \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = \{0; 1\}$; $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ вполне соответствует естественному определению множества притяжения.

2. Символика и простейшие понятия

Используем $\triangleq$ для обозначения равенства по определению. Кроме того, потребуются теоретико-множественные понятия и символика, в основном согласующиеся с [15]. Некоторые обозначения такого рода приведем в виде сводки. Кроме того, далее используются традиционные для современной топологии понятия (см. в этой связи [11]–[14]), не оговариваемые в ряде случаев специально. В то же время некоторые (более специальные) понятия соответствующими ссылками снабжены; при этом учитывается, в частности, то обстоятельство, что для некоторых из этих понятий нередко используется различная терминология. Наконец, в связи с конструкциями множеств притяжения далее используются представления [6]–[10], касающиеся интерпретации упомянутых множеств как пределов многозначных отображений. Последнее обстоятельство требует некоторых специальных обозначений. Так, например, будет, как правило, указываться конкретная топология, которой оснащается то или иное множество; последнее в ряде случаев будет оснащено несколькими топологиями.

Итак, отметим некоторые обозначения. Семейство всех (всех непустых) подмножеств множества X обозначаем через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$); семействами именуем множества, все элементы которых сами являются множествами. Множество всех отображений из множества A в множество B обозначаем через B^A; в этих условиях для $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ полагаем, что $(f \mid C)$ и $f^1(C)$ суть соответственно сужение f на множество C и образ C при отображении f (см., например, [11,с.26]). В последнем случае специальное обозначение $f^1(C)$ выбрано с тем, чтобы отличать образ множества от образа точки, где, как обычно, используются обозначения типа $f(c)$. В дальнейшем через $\mathbb{R}$ обозначается вещественная прямая, $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ есть натуральный ряд. Заметим, что множество всех последовательностей в произвольном множестве H есть множество $H^{\mathcal{N}}$. Мы используем далее, в частности, отображения, значениями которых являются множества. Рассмотрим некоторые специальные семейства. Если X — множество, то

$$\mathcal{B}[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid \forall A \in \mathcal{X}\ \forall B \in \mathcal{X}\ \exists C \in \mathcal{X} :\ C \subset A \cap B\}. \qquad (2.1)$$

Каждое семейство, являющееся элементом множества (2.1), может быть оснащено естественным направлением [11], определяемым как бинарное отношение на данном семействе, двойственное к вложению. Заметим, что $\mathcal{H} \in \mathcal{B}[X]$ есть базис фильтра множества X тогда и только тогда, когда $\emptyset \notin \mathcal{X}$. Если X — множество, то

$$\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(X) \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{B}[X] \mid \exists (H_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathcal{X}^{\mathcal{N}}\ \forall H \in \mathcal{X}\ \exists k \in \mathcal{N} :\ H_k \subset H\}$$

есть множество всех семейств из множества (2.1), имеющих счетную базу. Используем далее направленные множества и направленности [11], определяя последние посредством триплетов: $(D, \preceq, f)$ есть направленность в множестве X, если $(D, \preceq)$ есть непустое направленное множество и $f \in X^D$. Каждая направленность упомянутого типа порождает фильтр. В самом деле, для произвольных множества X и направленности $(D, \preceq, f)$ в множестве

X семейство

$$(X-ass)[D;\preceq;f] \stackrel{\triangle}{=} \{H\in\mathcal{P}(X)\mid \exists d\in D\ \forall\delta\in D: (d\preceq\delta)\Longrightarrow(f(\delta)\in H)\} \qquad (2.2)$$

есть фильтр X, ассоциированный с $(D,\preceq,f)$. В дальнейшем (2.2) используем без дополнительных пояснений. Ниже потребуются некоторые обозначения топологического характера. Если (X,τ) есть топологическое пространство и $M\in\mathcal{P}(X)$, то:

1) через $cl(M,\tau)$ обозначаем замыкание M в пространстве (X,τ);

2) $\mathbb{N}^0_\tau[M]\stackrel{\triangle}{=}\{G\in\tau\mid M\subset G\}$;

3) $\mathbb{N}_\tau[M]\stackrel{\triangle}{=}\{H\in\mathcal{P}(X)\mid\exists G\in\mathbb{N}^0_\tau[M]:\ \ G\subset H\}$ (семейство всех, не обязательно открытых, окрестностей множества M в (X,τ); если $M\neq\emptyset$, то $\mathbb{N}_\tau[M]$ — фильтр X).

Когда задана топология соответствующего множества, возможно использование более простой символики (см. раздел 1), когда в обозначениях указывается только само множество. Это удобно, например, при стандартной топологизации множеств в конечномерных арифметических пространствах на основе понятия покоординатной сходимости. В то же время в бесконечномерных, как правило, пространствах, используемых в конструкциях расширения, конкретный выбор топологии уже не столь однозначен. Поэтому, имея в виду последующие общие построения, мы используем в обозначениях для топологических пространств упорядоченные пары, у которых первый элемент — множество, а второй — соответствующая его топология.

Если (X,τ) есть произвольное топологическое пространство и $x\in X$, то фильтр

$$N_\tau(x)\stackrel{\triangle}{=}\mathbb{N}_\tau[\{x\}]$$

всевозможных (не обязательно открытых) окрестностей точки x порождается базисом $N^0_\tau(x)\stackrel{\triangle}{=}\mathbb{N}^0_\tau[\{x\}]$ всех открытых окрестностей x. Сходимость по Мору–Смиту определяется в терминах фильтра (2.2): если (X,τ) — топологическое пространство, $(D,\preceq,f)$ — направленность в X и $x\in X$, то (см.[11,гл.2]) полагаем по определению

$$((D,\preceq,f)\xrightarrow{\tau}x)\Longleftrightarrow(N_\tau(x)\subset(X-ass)[D;\preceq;f]). \qquad (2.3)$$

В частности, (2.3) определяет сходимость последовательности в соответствующем топологическом пространстве. Рассмотрим конструкции множеств притяжения. Если U — непустое множество с оснащением $\mathcal{U}\in\mathcal{B}[U]$, (V,τ)

— топологическое пространство и $f \in V^U$, то, в согласии с [6,с.39,40] и [7,с.35], пересечение

$$(\tau - LIM)[\mathcal{U} \mid f]$$

всех множеств $cl(f^1(H), \tau)$, $H \in \mathcal{U}$, есть одновременно множество всех $v \in V$ таких, что для некоторой направленности $(D, \preceq, \varphi)$ в U имеет место

$$(\mathcal{U} \subset (U - ass)[D; \preceq; \varphi]) \;\&\; ((D, \preceq, f \circ \varphi) \xrightarrow{\tau} v); \tag{2.4}$$

с учетом (2.4) интерпретируем $(\tau - LIM)[\mathcal{U} \mid f]$ как множество притяжения. Кроме того, рассмотрим другую версию множеств притяжения, используя (2.4) в качестве основы. Если $(\mathbf{T}, \tau)$ есть топологическое пространство, то через $(\tau - comp)[\mathbf{T}]$ обозначаем семейство всех компактных в пространстве $(\mathbf{T}, \tau)$ подмножеств $\mathbf{T}$ (следуем здесь определению [12,с.196] и не используем по ряду причин термин “бикомпактность”); если к тому же D и X — непустые множества и $r \in \mathbf{T}^X$, то $\mathcal{M}_{\mathbf{c}}(D, X, \mathbf{T}, \tau, r)$ есть по определению множество всех операторов $\varphi \in X^D$, для каждого из которых $\exists \mathbf{C} \in (\tau - comp)[\mathbf{T}] : \ (r \circ \varphi)^1(D) \subset \mathbf{C}$. Такие операторы φ называем компактифицируемыми. Если U, $U \neq \emptyset$, — множество с оснащением $\mathcal{U} \in \mathcal{B}[U]$, (V, τ) и $(\mathbb{T}, \tau_1)$ — два ТП, $f \in V^U$ и $r \in \mathbb{T}^U$, то через

$$((\mathbf{c}\tau_1, \tau) - LIM)[\mathcal{U} \mid r; f] \tag{2.5}$$

обозначаем множество всех $v \in V$, для каждого из которых существуют направленное множество $(D, \preceq)$, $D \neq \emptyset$, и оператор $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathbf{c}}(D, U, \mathbb{T}, \tau_1, r)$ такие, что направленность $(D, \preceq, \varphi)$ обладает свойством (2.4); разумеется, $((\mathbf{c}\tau_1, \tau) - LIM)[\mathcal{U} \mid r; f] \subset (\tau - LIM)[\mathcal{U} \mid f]$. В виде (2.5) имеем другой вариант множеств притяжения (по поводу применения конкретных версий (2.5) см., например, [7,гл.3,4,6],[9],[10] в связи с конструкцией аттрактора ограниченной сходимости в редакции, принятой в [7]). Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$, то $f^{-1}[\mathfrak{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{f^{-1}(H) \colon H \in \mathfrak{B}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; при $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}[B]$ имеем $f^{-1}[\mathfrak{B}] \in \mathcal{B}[A]$. В последнем случае в качестве $\mathfrak{B}$ можно использовать, в частности, семейство всех окрестностей [14,с.19] множества в ТП. Однако в ряде случаев интересно рассматривать более узкое семейство окрестностей (например, в псевдометрическом и, в частности, в метрическом пространствах представляет интерес использование ε-окрестностей, где $\varepsilon > 0$).

Введем одну специальную конструкцию [16], полагая для произвольных топологического пространства (X, τ), $X \neq \emptyset$, непустого множества Q и $M \in \mathcal{P}(X)$, что $\mathcal{O}_M(Q, \tau)$ есть по определению множество всех отображений Λ из $X \times Q$ в $\mathcal{P}(X)$, для каждого из которых $\forall x \in M \ \forall q \in Q \colon \Lambda(x, q) \in N_\tau(x)$. Разумеется, кортеж (X, τ, Q, M), характеризующий условия предыдущего определения, обладает свойством: для $\Lambda \in \mathcal{O}_M(Q,\tau)$ и $q \in Q$ объединение всех множеств $\Lambda(x,q)$, $x \in M$, есть элемент семейства $\mathbb{N}_\tau[M]$. Если (X,τ), $X \neq \emptyset$, — топологическое пространство, Q — непустое множество и $M \in \mathcal{P}(X)$, то через $(UNIF)[Q;\tau \mid M]$ обозначаем множество всех (окрестностнозначных) отображений $\Lambda \in \mathcal{O}_X(Q,\tau)$, для каждого из которых

$$\forall q_1 \in Q \; \forall q_2 \in Q \; \exists q_3 \in Q \; \forall \mu \in M: \; \Lambda(\mu,q_3) \subset \Lambda(\mu,q_1) \cap \Lambda(\mu,q_2). \tag{2.6}$$

Из (2.6) легко следует полезное свойство, перед формулировкой которого введем одно определение, существенное в дальнейшем. Для произвольных топологического пространства (X,τ), $X \neq \emptyset$, непустого множества Q, $M \in \mathcal{P}(X)$ и отображения $\Lambda^* \in (UNIF)[Q;\tau \mid M]$ полагаем

$$\mathcal{U}(Q,\tau,M \mid \Lambda^*) \stackrel{\triangle}{=} \{ \bigcup_{\mu \in M} \Lambda^*(\mu,q) : \; q \in Q\};$$

при этом $\mathcal{U}(Q,\tau,M \mid \Lambda^*) \in \mathcal{B}[X]$ есть подсемейство $\mathbb{N}_\tau[M]$, т.е. семейство окрестностей множества M.

Простой пример окрестностнозначного отображения Λ со свойством (2.6), определяющим основное свойство последнего семейства, получаем в случае, когда в псевдометризуемом (и, в частности, в метризуемом) топологическом пространстве (X,τ) при $Q =]0,\infty[$ определяется оператор Λ из $X \times Q$ в $\mathcal{P}(X)$, действующий по правилу: для $x \in Q$ и $q \in Q$ множество $\Lambda(x,q)$ есть открытый шар радиуса q с центром в x, конструируемый в псевдометрике, порождающей топологию τ.

Если (U,τ_1), $U \neq \emptyset$, и (V,τ_2), $V \neq \emptyset$, суть топологические пространства, то через $C(U,\tau_1,V,\tau_2)$ обозначаем множество всех непрерывных, в смысле (U,τ_1) и (V,τ_2), операторов из множества V^U. Следующее предложение обобщает аналогичное утверждение [16] об использовании запаса окрестностей, отличающегося, вообще говоря, от всего семейства окрестностей заданного множества в топологическом пространстве.

Предложение 2.1. *Пусть X и Q — непустые множества; (U,τ_1) и (V,τ_2) — непустые топологические пространства; $\alpha \in U^X$; $\beta \in V^X$; $M \in \mathcal{P}(U)$; $\Lambda \in (UNIF)[Q;\tau_1 \mid M]$;*

$$(\exists \mathbf{g} \in C(V,\tau_2,U,\tau_1) : \alpha = \mathbf{g} \circ \beta) \& (\forall u \in U \setminus M \; \exists q \in Q : \Lambda(u,q) \cap (\bigcup_{\mu \in M} \Lambda(\mu,q)) = \emptyset).$$

Тогда:

1) $(\tau_2 - LIM)[\alpha^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]] \mid \beta] = (\tau_2 - LIM)[\alpha^{-1}[\mathcal{U}(Q,\tau_1,M \mid \Lambda)] \mid \beta]$;

2) *если* $(\mathbb{T},\theta)$ — *ТП и* $r \in \mathbb{T}^X$, *то* $((\mathbf{c}\theta,\tau_2) - LIM)[\alpha^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]] \mid r;\beta] = ((\mathbf{c}\theta,\tau_2) - LIM)[\alpha^{-1}[\mathcal{U}(Q,\tau_1,M \mid \Lambda)] \mid r;\beta]$.

В связи с предложением 2.1 и его последующим применением отметим конструкции [16],[17]. Рассмотрим краткую схему обоснования п.1, фиксируя $\mathbf{g} \in C(V, \tau_2, U, \tau_1)$ со свойством $\alpha = \mathbf{g} \circ \beta$. Выберем

$$\mu \in (\tau_2 - LIM)[\alpha^{-1}[\mathcal{U}(Q, \tau_1, M \mid \Lambda)] \mid \beta].$$

Для данной точки $\mu \in V$ подберем направленность $(D, \preceq, \rho)$ в U со свойством [копирующим (2.4)]

$$(\alpha^{-1}[\mathcal{U}(Q, \tau_1, M \mid \Lambda)] \subset (X - ass)[D; \preceq; \rho]) \,\&\, ((D, \preceq, \beta \circ \rho) \xrightarrow{\tau_2} \mu).$$

Легко видеть, что при этом направленность $(D, \preceq, \alpha \circ \rho)$ (в U) является сходящейся к $\mathbf{g}(\mu)$ в ТП (U, τ_1); здесь использовано представление α в виде суперпозициии. Тогда из предположения о Λ-отделимости точек из $U \setminus M$ от множества M легко следует [поскольку $(X - ass)[D; \preceq; \rho]$ — фильтр X; см. (2.2)], что $\mathbf{g}(\mu) \in M$. Поэтому $\mathbb{N}_{\tau_1}[M] \subset N_{\tau_1}(\mathbf{g}(\mu))$, откуда, снова используя вышеупомянутую сходимость направленности $(D, \preceq, \alpha \circ \rho)$, мы извлекаем вложение

$$\alpha^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]] \subset (X - ass)[D; \preceq; \rho],$$

фактически завершающее обоснование п.1. Доказательство утверждения 2 осуществляется аналогичными методами.

Предложение 2.2. *Пусть X — непустое множество; (U, τ_1) и (V, τ_2) — непустые топологические пространства; $p \in V^X$, $q \in C(V, \tau_2, U, \tau_1)$; $M \subset U$; $V = cl(p^1(X), \tau_2)$. Тогда:*

1) $q^{-1}(M) \subset (\tau_2 - LIM)[(q \circ p)^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]] \mid p]$;

2) *если, кроме того,*

$$\forall u \in U \setminus M \; \exists H_1 \in N_{\tau_1}(u) \; \exists H_2 \in \mathbb{N}_{\tau_1}[M] : \; H_1 \cap H_2 = \emptyset, \tag{2.7}$$

то $(\tau_2 - LIM)[(q \circ p)^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]] \mid p] = q^{-1}(M)$.

Доказательство использует простейшие свойства окрестностей точек и множеств в топологическом пространстве, а также хорошо известные свойства непрерывных отображений. Оно осуществляется традиционными для общей топологии методами и опущено по соображениям объема. Условие (2.7) выполняется, в частности, в случае замкнутого множества M в псевдометризуемом пространстве. Можно указать и много других примеров.

Предложение 2.3. *Пусть кортеж $(X, U, \tau_1, V, \tau_2, p, q, M)$ соответствует предложению 2.2, $V = cl(p^1(X), \tau_2)$, Q — непустое множество, $\Lambda \in (UNIF)[Q; \tau_1 \mid M]$ и при этом*

$$\forall u \in U \setminus M \; \exists \tilde{q} \in Q : \; \Lambda(u, \tilde{q}) \cap \Big(\bigcup_{\mu \in M} \Lambda(\mu, \tilde{q})\Big) = \emptyset.$$

Тогда $q^{-1}(M) = (\tau_2 - LIM)[\mathcal{X}|p]$, *где* $\mathcal{X}$ — *любое из семейств* $(q \circ p)^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[M]]$ *или* $(q \circ p)^{-1}[\mathcal{U}(Q, \tau_1, M|\Lambda)]$.

Доказательство сводится к непосредственной комбинации предложений 2.1 и 2.2.

Предложение 2.4. *Пусть* X — *непустое множество с оснащением* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}[X]$; (V, τ_1), $V \neq \emptyset$, *и* (W, τ_2), $W \neq \emptyset$, *суть топологические пространства;* $\alpha \in V^X$; $\beta \in C(V, \tau_1, W, \tau_2)$. *Тогда*

$$\beta^1((\tau_1 - LIM)[\mathcal{X} \mid \alpha]) \subset (\tau_2 - LIM)[\mathcal{X} \mid \beta \circ \alpha]; \tag{2.8}$$

если β *почти совершенно* [12,с.287] *в смысле* (τ_1, τ_2), *то* (2.8) *превращается в равенство.*

Доказательство легко следует из заключительных положений работы [10].

Предложение 2.5. *Пусть* X — *непустое множество с оснащением* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(X)$; (V, τ_1), $V \neq \emptyset$, *есть счетно-компактное* [12,с.304] *топологическое пространство;* (W, τ_2), $W \neq \emptyset$, *есть топологическое пространство, являющееся* T_1*-пространством* [12,с.69]; $\alpha \in V^X$; β — *замкнутое* [12,с.62] *в смысле пространств* (V, τ_1) *и* (W, τ_2) *отображение из* V *в* W. *Тогда* (2.8) *превращается в равенство.*

Последнее предложение — очевидный аналог теоремы 2.5.2 [6]; доказательство легко извлекается из свойств счетных центрированных систем замкнутых множеств в счетно-компактном топологическом пространстве (см. теорему 3.10.2 [12]).

Предложение 2.6. *Пусть* X — *непустое множество с оснащением* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(X)$; (V, τ_1), $V \neq \emptyset$, *и* (W, τ_2), $W \neq \emptyset$, *суть топологические пространства;* $\alpha \in V^X$; β *есть замкнутое* [12,с.62] *отображение из* V *в* W *со свойством счетной компактности каждого множества* $\beta^{-1}(\{w\})$, $w \in W$, *понимаемой в смысле* [13,с.239]. *Тогда* (2.8) *превращается в равенство.*

Доказательство аналогично в идейном отношении рассуждениям заключительной части работы [10] с очевидной коррекцией, отвечающей использованию счетно-компактных множеств в топологическом пространстве. В дальнейшем под локальной компактностью топологического пространства будем понимать свойство, несколько отличающееся от [12, с.231] в сторону использования определений типа локальной квазикомпактности [14, с.151] (соответствующее традиционное условие локальной компактности достаточно для справедливости последующего определения и совпадает с ним в классе хаусдорфовых пространств): топологическое пространство (X, τ) называем локально компактным, если

$$\forall x \in X:\ N_\tau(x) \cap (\tau - comp)[X] \neq \emptyset.$$

Следующее положение легко устанавливается с использованием теоремы 2.5.2 [6] в ее локальной версии.

Предложение 2.7. *Пусть X — непустое множество с оснащением $\mathcal{X} \in \mathcal{B}[X]$; (V, τ_1), $V \neq \emptyset$, и (W, τ_2), $W \neq \emptyset$, суть топологические пространства, причем (W, τ_2) — хаусдорфово пространство; $\alpha \in V^X$; $\beta \in C(V, \tau_1, W, \tau_2)$. Тогда*

$$((\mathbf{c}\tau_1, \tau_2) - LIM)[\mathcal{X} \mid \alpha; \beta \circ \alpha] \subset \beta^1((\tau_1 - LIM)[\mathcal{X} \mid \alpha]); \tag{2.9}$$

если к тому же (V, τ_1) локально компактно, то (2.9) превращается в равенство.

3. Структура множеств притяжения

Мы возвращаемся к задаче раздела 1, фиксируя в дальнейшем непустые множества $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$, операторы $s \in \mathbf{X}^{\mathbf{F}}$ и $h \in \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$, а также множество $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$. В итоге имеем задачу определения множества допустимых элементов $s^{-1}(\mathbf{Y})$ и достижимого множества $h^1(s^{-1}(\mathbf{Y}))$. Пример раздела 1 показывает (см. также многочисленные примеры [5,гл.III],[6,гл.1],[7,гл.1,2]), что данная задача объективно нуждается в регуляризации (последний термин понимается здесь в несколько ином смысле по сравнению с традиционным методом теории некорректных задач [18]–[20]). Для этой цели вместо множества допустимых элементов и достижимого множества используем множества притяжения, конструкции которых соответствуют разделу 2. Оснащение $\mathbf{H}$ естественной топологией $\tau^{(2)}$ (данного множества) является обычно бесспорным; топологическое пространство $(\mathbf{H}, \tau^{(2)})$, как правило, нетрудно согласовать с соответствующей конкретной постановкой (см.[6],[7]); очень часто данное пространство метризуемо. В данном топологическом пространстве осуществляется построение требуемых версий множеств притяжения, заменяющих достижимое множество (см. раздел 1). Выбор топологического оснащения $\mathbf{X}$ уже не столь очевиден, поскольку функцией этого оснащения является всего лишь замена точного $\mathbf{Y}$-ограничения приближенным. Естественный вариант последней намечен в разделе 1 в терминах замены $\mathbf{Y}$ окрестностями в топологии $\tau^{(1)}$; конструкции раздела 2 в известной мере мотивируют данный подход. Тем не менее коль скоро выбор $\tau^{(1)}$ является в значительной мере субъективным, имеет смысл обеспечение "достаточной" универсальности получающихся регуляризаций относительно $\tau^{(1)}$. В этой связи полагаем, что множество $\mathbf{X}$ оснащено парой сравнимых топологий $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}}$ и $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}} \subset \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}$, в терминах которых будем конструировать регуляризации задачи о построении достижимого множества на основе соответствующих множеств притяжения [на самом деле получаемые утверждения относятся к диапазону ограничений асимптотического характера, определяемому в терминах $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}$; такой вывод легко следует из свойства некоторой естественной монотонности множеств притяжения при изменении определяющего (упомянутое множество притяжения) семейства множеств в пределах (2.1), где $X = \mathbf{F}$]. Следуя подходу раздела 1, будем использовать модель, определяемую топологическим пространством $(\mathbf{K}, \tau^{(3)})$ и отображениями

$$(m \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}})\ \&\ (g \in C(\mathbf{K}, \tau^{(3)}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}))\ \&\ (\omega \in C(\mathbf{K}, \tau^{(3)}, \mathbf{H}, \tau^{(2)})). \qquad (3.1)$$

Постулируем для данной модели выполнение следующих условий:

$$(s = g \circ m)\ \&\ (h = \omega \circ m)\ \&\ (\mathbf{K} = cl(m^1(\mathbf{F}), \tau^{(3)})). \qquad (3.2)$$

По поводу содержательного смысла упомянутых условий мы отсылаем читателя к [7,гл.3,4,6],[16],[17], где рассмотрена конкретная (и несводящаяся, вообще говоря, к процедуре компактификации пространства решений) версия. Отметим только, что второе в (3.1) условие может интерпретироваться, в силу сравнимости упомянутых топологий $\mathbf{X}$, как "универсальная" непрерывность g, т.к. из (3.1) следует, конечно,

$$g \in C(\mathbf{K}, \tau^{(3)}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}}). \qquad (3.3)$$

Отметим здесь же, что последнее в (3.2) условие ограничением фактически не является. В связи с топологизацией $\mathbf{X}$ нас будут интересовать семейства

$$(\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{N}_{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}}}[\mathbf{Y}])\ \&\ (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{N}_{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}}[\mathbf{Y}]); \qquad (3.4)$$

в пределах семейств (3.4) мы только и допускаем выбор окрестности $\mathcal{O}$ раздела 1 (ниже мы исследуем также возможность сужения $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$ до некоторого его подсемейства). Разумеется, $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \subset \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ и (см. раздел 2)

$$\begin{gathered} h^1(s^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \omega^1((\tau^{(3))} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m]) \subset \\ \subset (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid h] \subset (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid h]. \end{gathered} \qquad (3.5)$$

В (3.5) учтено свойство (3.3) и первое утверждение в предложении 2.2. Кроме того, из предложения 2.4 имеем

$$\begin{aligned} \omega^1((\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m]) &\subset \omega^1((\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m]) \subset \\ &\subset (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid h]. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Оценки (3.5), (3.6) касаются очень общей ситуации (работы с “плохой” моделью), и мы не останавливаемся на различных их аналогах, связанных, в частности, с регуляризацией задачи о построении множества допустимых элементов. Так, например, в случае хаусдорфова пространства $(\mathbf{H}, \tau^{(2)})$ с учетом предложений 2.4, 2.7 имеем

$$\begin{aligned} h^1(s^{-1}(\mathbf{Y})) &\subset ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m; h] \subset \\ &\subset \ ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h] \subset \\ &\subset \ \omega^1((\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m]) \subset (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid h]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Условие 3.1. $\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \ \exists H_1 \in N_{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}}}(x) \ \exists H_2 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} : \ H_1 \cap H_2 = \emptyset.$

Предложение 3.1. *Пусть выполнено условие* 3.1. *Тогда*

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m] = (\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m].$$

Доказательство. Из (3.1)–(3.4) и предложения 2.2 следует совпадение $g^{-1}(\mathbf{Y})$ и $(\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m]$. В силу сравнимости $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{u}}$ имеем аналог условия 3.1 с заменой (в этом условии) $\mathbf{l} \longrightarrow$ **и**, а тогда [см. (3.1),(3.2), предложение 2.2] $g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m]$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* 3.1, *а* ω *есть почти совершенное* [12,с.287] *в смысле* $(\tau^{(3)}, \tau^{(2)})$ *отображение из* $\mathbf{K}$ *в* $\mathbf{H}$. *Тогда*

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid h] = (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid h].$$

Доказательство сводится к комбинации (3.1), (3.2) и предложений 2.4 и 3.1.

Предложение 3.2. *Пусть* $(\mathbf{H}, \tau^{(2)})$ *— хаусдорфово пространство и выполнено условие* 3.1. *Тогда*

$$\begin{aligned} h^1(s^{-1}(\mathbf{Y})) \ &\subset \ ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m; h] \subset \\ &\subset \ ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h] \subset \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})). \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно сравнить (3.7) и предложение 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $(\mathbf{H}, \tau^{(2)})$ *— хаусдорфово, а* $(\mathbf{K}, \tau^{(3)})$ *— локально компактное пространство. Кроме того, пусть выполнено условие* 3.1. *Тогда*

$$\begin{aligned} \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) \ &= \ ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h] = \\ &= \ ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m; h]. \end{aligned}$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложений 2.7 и 3.1.

Фиксируем до конца настоящего раздела непустое множество $\mathbf{Q}$ и (окрестностнозначное) отображение $\Lambda_0 \in (UNIF)[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}} \mid \mathbf{Y}]$. Тогда

$$\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{U}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}}, \mathbf{Y} \mid \Lambda_0) \in \mathcal{B}[\mathbf{X}]. \tag{3.8}$$

С учетом определений раздела 2 имеем $\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}$:

$$(\forall x \in \mathbf{X} :\ \Lambda_0(x, \mathbf{q}) \in N_{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{l}}}(x))\ \&\ (\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}} \subset \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}). \tag{3.9}$$

З а м е ч а н и е. В связи с (3.8),(3.9) отметим, что данное “новшество” направлено на расширение диапазона ограничений асимптотического характера, обслуживаемого множеством притяжения $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$: речь идет о дополнении утверждений теорем 3.1 и 3.2. С практической точки зрения использование семейства (3.8) может быть связано с избыточностью в той или иной конкретной задаче семейства всех окрестностей $\mathbf{Y}$ (ранее, в разделе 2, об этом уже говорилось в связи с использованием ε-окрестностей множества в псевдометрическом пространстве). В свою очередь, (3.9) означает, что мы вводим в рассмотрение еще более облегченный вариант ограничений асимптотического характера, т.е. еще более контрастный в сравнении с $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$.

Условие 3.2. $\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}\ \exists \mathbf{q} \in \mathbf{Q} :\ \Lambda_0(x, \mathbf{q}) \cap (\bigcup\limits_{y \in \mathbf{Y}} \Lambda_0(y, \mathbf{q})) = \emptyset.$

Предложение 3.3. *Условие* 3.2 *достаточно для выполнения условия* 3.1.

Для доказательства следует сопоставить (3.4),(3.8) и (3.9).

Предложение 3.4. *Пусть выполнено условие* 3.2. *Тогда*

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathbf{Y}) &= (\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m] = \\ &= (\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m] = (\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Доказательство. Из предложений 3.1 и 3.3 имеем совпадение трех первых множеств в (3.10). Далее, из (3.1)–(3.3), (3.8), условия 3.2 и предложения 2.1 вытекает равенство

$$(\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m] = (\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m],$$

чем и завершается доказательство (3.10).

П р и м е ч а н и е. Заметим, что при условии 3.2 имеет место

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{B}[\mathbf{F}]\ (s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \subset \mathcal{X} \subset s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}]) \Longrightarrow (g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\tau^{(3)} - LIM)[\mathcal{X} \mid m]).$$

В дальнейшем очевидные диапазонные свойства такого типа специально оговариваться не будут.

В связи с распространением предложения 3.4 на случай, когда объектом регуляризации является задача о построении достижимого множества, отметим теорему 2.5.2 [6]. Сейчас рассмотрим только следующий ее счетно-компактный аналог.

Предложение 3.5. *Пусть выполнено условие* 3.2; $\mathfrak{Y}_\mathbf{l} \in \mathcal{B}_\mathcal{N}(\mathbf{X})$; $(\mathbf{K}, \tau^{(3)})$ *— счетно-компактное пространство;* $(\mathbf{H}, \tau^{(2)})$ *—* T_1*-пространство;* ω *— замкнутое* [12, с.62] *в смысле* $(\tau^{(3)}, \tau^{(2)})$ *отображение из* $\mathbf{K}$ *в* $\mathbf{H}$. *Тогда*

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_\mathbf{l}] \mid h]. \tag{3.11}$$

Доказательство. В силу предложения 2.5 имеем равенство

$$\omega^1((\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_\mathbf{l}] \mid m]) = (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_\mathbf{l}] \mid h]. \tag{3.12}$$

С другой стороны, в силу предложения 3.4 [см. (3.10)] первое в (3.12) множество совпадает с $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$.

Предложение 3.6. *Пусть выполнено условие* 3.2; $\mathfrak{Y}_\mathbf{l} \in \mathcal{B}_\mathcal{N}(\mathbf{X})$; ω *есть замкнутое в смысле* $(\tau^{(3)}, \tau^{(2)})$ *отображение из* $\mathbf{K}$ *в* $\mathbf{H}$, *для которого при всяком* $z \in \mathbf{H}$ *множество* $\omega^{-1}(\{z\})$ *счетно-компактно* [13,с.239] *в пространстве* $(\mathbf{K}, \tau^{(3)})$. *Тогда справедливо* (3.11).

Доказательство. В силу (3.10) имеем совпадение $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ и множества в левой части (3.12). С другой стороны, это множество совпадает, в силу предложения 2.6 и (3.2), с $(\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_\mathbf{l}] \mid h]$.

З а м е ч а н и е. Мы ограничимся здесь предложениями 3.5, 3.6 в виде версий предложений 2.5 и 2.6 соответственно по единственной причине: условие $\mathfrak{Y}_\mathbf{l} \in \mathcal{B}_\mathcal{N}(\mathbf{X})$ вполне реалистично для широкого круга прикладных задач с метризуемым либо псевдометризуемым топологическим пространством $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}_\mathbf{l})$, в то время как аналогичное соглашение в отношении $\mathcal{Y}_\mathbf{l}$ требует проверки и в этих случаях (последняя, в частности, легко осуществляется при дополнительном условии компактности $\mathbf{Y}$ в случае метризуемой топологии $\boldsymbol{\tau}_\mathbf{l}$; см., например, определение числа Лебега в [12,с.409]).

Теорема 3.3. *Пусть выполнено условие* 3.2, *а* ω *есть почти совершенное в смысле* $(\tau^{(3)}, \tau^{(2)})$ *отображение из* $\mathbf{K}$ *в* $\mathbf{H}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) &= (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_\mathbf{l}] \mid h] = \\ &= (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_\mathbf{u}] \mid h] = (\tau^{(2)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_\mathbf{l}] \mid h]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 и предложения 3.3 имеем совпадение трех первых множеств в (3.13). Далее, из предложения 3.4 [см. (3.10)] имеем совпадение $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ с множеством в левой части (3.12). Из предложения 2.4 имеем свойство (3.12) в целом, что означает справедливость (3.13).

Предложение 3.7. *Пусть выполнено условие* 3.2, *а* $(\mathbf{H}, \tau^{(2)})$ *есть хаусдорфово пространство. Тогда*

$$\begin{aligned} h^1(s^{-1}(\mathbf{Y})) &\subset ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m; h] \subset \\ &\subset ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h] \subset \\ &\subset ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h] \subset \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Доказательство. В силу предложения 3.3 имеем из предложения 3.2, (3.7) и (3.9) справедливость всех вложений в (3.14), кроме последнего. В то же время, согласно предложению 2.7,

$$\begin{aligned} &((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h] \subset \\ &\qquad \subset \omega^1((\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m]). \end{aligned} \tag{3.15}$$

С учетом предложения 3.4 и (3.15) получаем упомянутое последнее вложение в (3.14).

Теорема 3.4. *Пусть выполнено условие* 3.2; *пространство* $(\mathbf{K}, \tau^{(3)})$ *локально компактно; пространство* $(\mathbf{H}, \tau^{(2)})$ *хаусдорфово. Тогда*

$$\begin{aligned} \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) &= ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid m; h] = \\ &= ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h] = \\ &= ((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Доказательство. Из теоремы 3.2 и предложения 3.3 имеем совпадение трех первых множеств в (3.16). Далее, из предложения 2.7 имеем равенство

$$\begin{aligned} &((\mathbf{c}\tau^{(3)}, \tau^{(2)}) - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m; h] = \\ &\qquad = \omega^1((\tau^{(3)} - LIM)[s^{-1}[\mathfrak{Y}_{\mathbf{l}}] \mid m]). \end{aligned} \tag{3.17}$$

В силу (3.17) и предложения 3.4 получаем справедливость (3.16) в целом.

Выводы. В разделе 3 построена весьма общая схема корректного расширения задач определения множества допустимых элементов и достижимого множества, обладающая известной универсальностью относительно выбора конкретного варианта ослабления $\mathbf{Y}$-ограничения. Последняя достигается посредством вилки ограничений асимптотического характера: при возмущении $\mathbf{Y}$ до окрестности в более сильной топологии задействуется семейство всех окрестностей, в то время как в другой схеме, оперирующей с окрестностью $\mathbf{Y}$ в более слабой топологии, используется лишь часть окрестностей. Обобщенное достижимое множество $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ оказывается при весьма общих условиях ответственным за обслуживание постановок, в которых асимптотические ограничения заключены в пределах упомянутой вилки (имеются в виду аналоги свойства, отмеченного в примечании, которые относятся к проблеме корректного расширения задачи о построении достижимого множества). Конкретный класс задач о достижимости при возмущении системы ограничений, допускающий использование модели раздела 3 (включая выбор двух сравнимых топологий $\mathbf{X}$), рассмотрен в [16],[17]. Эти топологии конструировались в [16],[17] на основе тихоновских произведений экземпляров $\mathbb{R}$ в естественной $|\cdot|$-топологии либо в дискретной топологии. При этом более слабая топология определялась в виде обычной топологии поточечной сходимости соответствующего пространства функционалов. При построении (на основе конструкции тихоновского произведения) более сильной топологии того же пространства функционалов лишь часть упомянутых экземпляров $\mathbb{R}$ оснащалась $|\cdot|$-топологией, а другая часть, определяемая конкретными условиями исследуемой задачи, оснащалась дискретной топологией. Важно, что в данной конкретной версии легко реализуется и вариант (3.8),(3.9), соответствующий использованию равномеризованных (в смысле, согласующемся с конструкцией канонического базиса тихоновского произведения) окрестностей. Эти соображения позволяют интерпретировать конструкции [16],[17] как версию положений данной работы. Другую версию можно извлечь из положений [21],[22], логически связанных с построениями [5] для классических задач управления с геометрическими ограничениями. Заметим, что именно для таких задач получены наиболее содержательные варианты принципа максимума Л.С.Понтрягиным В связи с расширениями этих задач см. также [23]; игровые варианты данной конструкции расширения рассматривались в [3],[5],[24] и в целом ряде других работ. Конструкции расширения играют в этих задачах важную роль и в связи с обеспечением соответствующих постановок содержательных задач теоремами существования в классе обобщенных управлений.

Литература

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.:Наука, 1968.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.:Наука, 1970.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.:Наука, 1974.
4. Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.

5. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.:Наука, 1977.
6. Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. N.Y., L., M.: Plenum Publition Corporation, 1996.
7. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997.
8. Ченцов А.Г. К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий // Успехи матем. наук. 1995. Т.50, №5(305). С.223–242.
9. Ченцов А.Г. Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления. 1 // Изв. вузов. Математика. 1995. №2. С.60–71.
10. Ченцов А.Г. Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления. 2 // Изв. вузов. Математика. 1995. №3. С.62–73.
11. Келли Дж.Л. Общая топология. М.:Наука, 1981.
12. Энгелькинг Р. Общая топология. М.:Мир, 1986.
13. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М.: Высш. шк., 1979.
14. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.:Наука, 1968.
15. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.:Мир, 1970.
16. Ченцов А.Г. Релаксация интегральных ограничений в классе векторных конечно-аддитивных мер// Докл. РАН. 1998. Т.358, №5. С.609–613.
17. Ченцов А.Г. Универсальная асимптотическая реализация интегральных ограничений и конструкции расширений в классе конечно-аддитивных мер // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т.5. С.328–356.
18. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1986.
19. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Матем. сб. 1963. Т.61, №2. С.211–223.
20. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
21. Пак В.Е., Ченцов А.Г. Об одной процедуре регуляризации функции значения нелинейной задачи управления // Дифференц. уравнения. 1992. Т.28, №3. С.414–422.
22. Chentsov A.G., Pak V.E. On the extension of the nonlinear problem of optimal control with nonstationary phase resrictions // Nonlinear analysis: Theory, methods and applications. 1996. V.26, №2. P.383–394.
23. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.
24. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.:Наука, 1981.

Статья поступила 19.03.1999 г.;
окончательный вариант 05.10.1999 г.